

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

# ***Concreto Protendido***

## **Estados Limites**

---

---

***Gustavo de Souza Veríssimo***  
Professor Assistente, M.Sc.

***José Luiz Rangel Paes***  
Professor Assistente, M.Sc.

***Reginaldo Carneiro da Silva***  
Professor Assistente, M.Sc.

***Kléos Magalhães Lenz César Jr***  
Professor Assistente, M.Sc.

# CONTEÚDO

<b>1. ESTADOS LIMITE DE UTILIZAÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>1.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE A HOMOGENEIZAÇÃO DA SEÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.2.1 Homogeneização da seção - exemplo .....	2
<b>1.3 ESTADO LIMITE DE DESCOMPRESSÃO</b> .....	<b>4</b>
<b>1.4 ESTADO LIMITE DE FORMAÇÃO DE FISSURAS</b> .....	<b>4</b>
<b>1.5 ESTADO LIMITE DE ABERTURA DE FISSURAS</b> .....	<b>5</b>
1.5.1 Considerações sobre a abertura de fissuras .....	6
1.5.2 Proposições do Código Modelo do CEB/FIP, versão de 1990 .....	7
1.5.2.1 Comentários preliminares.....	7
1.5.2.2 Classes de exposição.....	8
1.5.2.3 Valor limite da abertura de fissuras para concreto protendido.....	8
1.5.2.4 Regras práticas para o controle de fissuração na flexão.....	9
<b>1.6 ESTADO LIMITE DE COMPRESSÃO EXCESSIVA</b> .....	<b>9</b>
<b>1.7 ESTADO LIMITE DE DEFORMAÇÕES EXCESSIVAS</b> .....	<b>10</b>
1.7.1 Comentários preliminares.....	10
1.7.2 Tipos de Deformações (Silva, 1992) .....	10
1.7.3 O Estado Limite de Deformações Excessivas.....	11
1.7.4 Efeito da fluência do concreto para os carregamentos de longa duração .....	11
<b>2. ESTADOS LIMITE ÚLTIMOS</b> .....	<b>14</b>
<b>2.1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>14</b>
<b>2.2 ESTADOS LIMITE ÚLTIMOS DEVIDO A SOLICITAÇÕES NORMAIS</b> .....	<b>15</b>
2.2.1 Estado limite último de ruptura ou alongamento plástico excessivo .....	15
2.2.2 Domínios de deformação .....	15
2.2.3 Hipóteses de cálculo.....	16
2.2.3.1 Exemplo 1 - Verificação de uma viga de C.A. no estado limite último .....	17
2.2.4 Estado de neutralização.....	19
2.2.5 Diagrama tensão-deformação dos aços de protensão .....	19
2.2.6 Valor de cálculo da força de protensão.....	21
2.2.7 Cálculo do pré-alongamento.....	21
2.2.8 Resistência da seção ao momento fletor .....	22
2.2.8.1 Exemplo 2 - Verificação de uma viga protendida no estado limite último .....	24
2.2.9 Estado limite último de ruptura no ato da protensão.....	28
2.2.9.1 Verificação simplificada .....	28
<b>2.3 ESTADOS LIMITE ÚLTIMOS DEVIDO A SOLICITAÇÕES TANGENCIAIS</b> .....	<b>29</b>
2.3.1 Generalidades .....	29
2.3.2 Forças cortantes (NBR 7197 - item 9.3.1) .....	29
2.3.2.1 Efeito da componente tangencial da força de protensão .....	29
2.3.2.2 Efeito da componente normal da força de protensão .....	30
2.3.3 Tensão no concreto .....	31
2.3.4 Tensões últimas resistentes.....	31
2.3.5 Cálculo da armadura transversal .....	31
2.3.6 Armadura transversal mínima.....	33
2.3.7 Exemplo de aplicação .....	34
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	<b>37</b>

## APRESENTAÇÃO

Até a década de 70, no Brasil, o cálculo de estruturas de um modo geral era executado com base no Método das Tensões Admissíveis. Dessa época para diante, um novo método de dimensionamento, denominado Método dos Estados Limites, tem sido adotado como base para a elaboração de normas e procedimentos de cálculo. As escolas de engenharia brasileiras têm então seguido esta tendência, adaptando seus currículos e o conteúdo de suas disciplinas com base no conceito de estados limites.

A presente publicação tem por principal objetivo dar suporte bibliográfico à disciplina CIV 457 - Concreto Protendido, do Curso de Engenharia Civil da UFV, em complemento às publicações *Concreto Protendido - Fundamentos Básicos* e *Concreto Protendido - Perdas de Protensão*.

A consideração dos estados limites últimos e de utilização aplicáveis às estruturas de concreto protendido é particularmente interessante do ponto de vista didático, uma vez que muitas das situações que têm obrigatoriamente que ser consideradas para estruturas protendidas não ocorrem nas estruturas de aço, de madeira e de concreto armado. Dessa forma, os conceitos, critérios de análise e procedimentos de cálculo abordados nessa apostila vêm não apenas complementar o que é visto nas disciplinas obrigatórias de estruturas mas também ampliar o seu significado.

Quaisquer críticas, sugestões e comentários dos leitores, são sempre bem-vindos, para que a partir deles possamos melhorar sempre este trabalho, no sentido de atender cada vez melhor aos alunos.

Gustavo de Souza Veríssimo  
Setembro de 1997

# ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO

## 1.1 INTRODUÇÃO

As verificações de estados limites de utilização devem ser feitas no estágio I ou II, conforme o caso. Os limites impostos referem-se à segurança relativa à formação ou abertura de fissuras, flechas excessivas e compressão excessiva.

QUADRO 1.1 - Estados limites de utilização a considerar

	descompressão	formação de fissuras	abertura de fissuras
tipo de protensão			
quase-permanentes			
frequentes			
raras			
completa	descompressão	descompressão	formação de fissuras
limitada	descompressão	formação de fissuras	
parcial	descompressão	abertura de fissuras	

## 1.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE A HOMOGENEIZAÇÃO DA SEÇÃO

A rigor, a avaliação das tensões e deformações numa peça estrutural composta por dois materiais com propriedades físicas diferentes, deve ser feita a partir da compatibilização dos materiais.

Nos casos de estruturas de concreto armado ou protendido e estruturas mistas, deve-se transformar um dos materiais em uma porção equivalente do outro. Por exemplo, no caso de vigas mistas, a mesa de concreto é transformada numa porção fictícia equivalente de aço.

No caso de peças de concreto armado/protendido, usualmente converte-se a armadura numa porção equivalente de concreto.

A transformação da armadura numa quantidade equivalente de concreto é feita multiplicando-se a área de aço  $A_p$  pela relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto,  $\alpha_e = E_p / E_c$ . Como  $E_p$ , em geral, é maior que  $E_c$ , ao se multiplicar  $A_p \cdot \alpha_e$  tem-se um aumento da seção transversal. Se a armadura ativa é excêntrica, o baricentro da seção homogeneizada se desloca da posição original em direção ao baricentro da armadura ativa. Isso resulta na diminuição das tensões, uma vez que

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{M}{W}$$

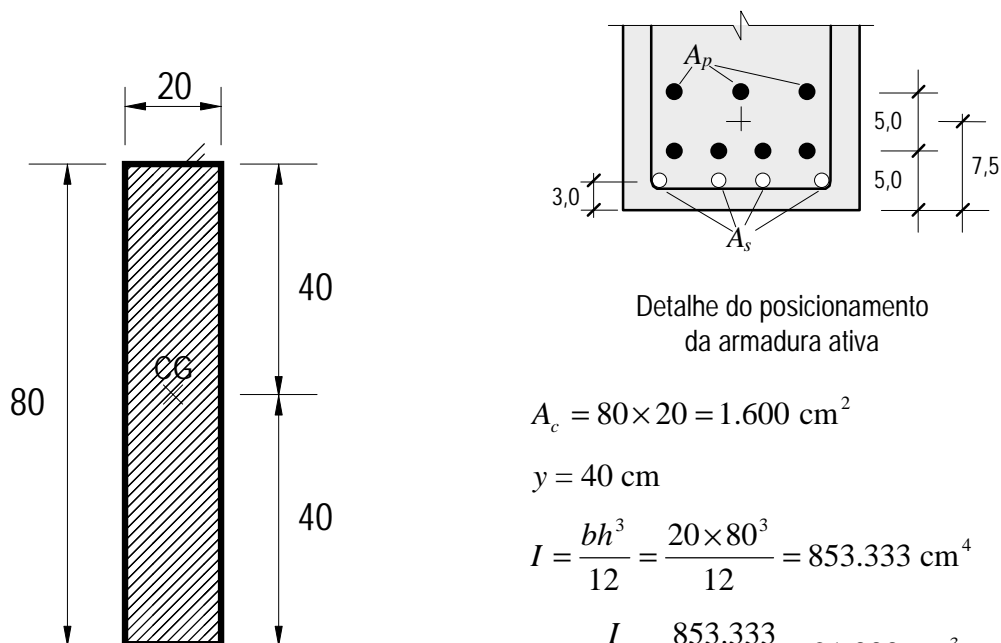
Conclui-se, então, que utilizar as propriedades originais da seção (sem efetuar a homogeneização) é um procedimento conservador e aceitável, uma vez que o aumento da seção em geral é pouco significativo. Neste caso, obtém-se tensões ou pouco maiores nos bordos da seção, o que, eventualmente, pode levar ao dimensionamento de mais armadura e, ou, de um concreto mais resistente. Por outro lado, utilizar as propriedades da seção homogeneizada no cálculo conduz a resultados mais coerentes e mais precisos e pode resultar num dimensionamento mais econômico.

A NBR7197 recomenda usar  $\alpha_e = 15$  para praticamente todas as verificações dos estados limites de utilização (não é feita nenhuma recomendação com relação aos estados limites últimos).

### 1.2.1 Homogeneização da seção - exemplo

Calcular as propriedades da seção homogeneizada para a viga abaixo, admitindo armadura ativa  $A_p = 6,91 \text{ cm}^2$  e  $\alpha = 15$ .

Propriedades da seção transversal não-homogeneizada:



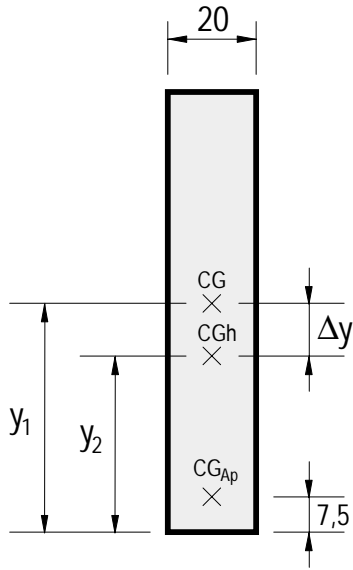
$$A_c = 80 \times 20 = 1.600 \text{ cm}^2$$

$$y = 40 \text{ cm}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 80^3}{12} = 853.333 \text{ cm}^4$$

$$W = \frac{I}{y} = \frac{853.333}{40} = 21.333 \text{ cm}^3$$

Propriedades da seção transversal homogeneizada:



$$A_{ch} = A_c - A_p + \alpha A_p = A_c + A_p (\alpha - 1)$$

$$A_{ch} = 1.600 - 6,91 + 103,65 = 1.696,74 \text{ cm}^2$$

$$y_2 = \frac{(A_c - A_p) y_1 + A_p \cdot \alpha \cdot y_p}{A_c + A_p (\alpha - 1)}$$

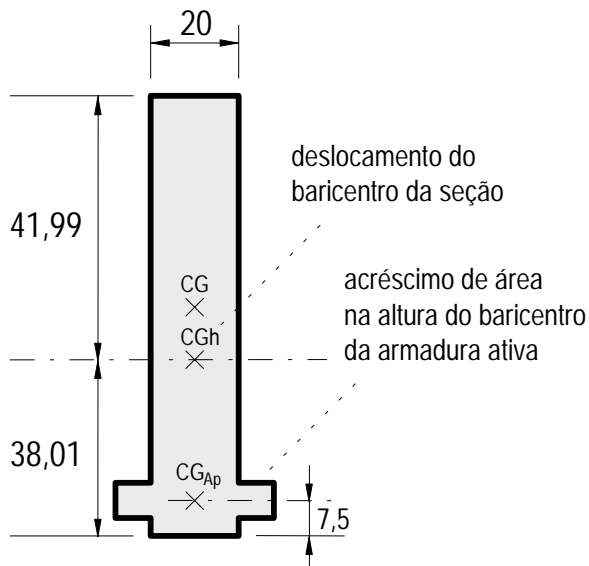
$$y_2 = \frac{(1.600 - 6,91)40 + 6,91 \times 15 \times 7,5}{1.600 + 6,91(15 - 1)} = 38,01 \text{ cm}$$

$$I_h = I + A_{ch} (\Delta y)^2 + I_{A_{ph}} + (\alpha - 1) A_p (y_1 - y_p)^2$$

$$I_{A_{ph}} = \text{inércia da armadura ativa homogeneizada (pode ser desprezada por ser muito pequena)}$$

$$\Delta y = y_1 - y_2 = 40 - 38,01 = 1,99 \text{ cm}$$

$$I_h = 853.333 + 1.696,74(1,99)^2 + (15 - 1)6,91 \times (40 - 7,5)^2 = 962.234 \text{ cm}^4$$



$y_s$  = distância do baricentro à fibra mais solicitada do lado superior

$$y_s = 41,99 \text{ cm}$$

$y_i$  = distância do baricentro à fibra mais solicitada do lado inferior

$$y_i = -38,01 \text{ cm}$$

$W_h$  = módulo elástico homogeneizado

$$W_{hs} = \frac{I_h}{y_s} = \frac{962.234}{41,99} = 22.916 \text{ cm}^3$$

$$W_{hi} = \frac{I_h}{y_i} = \frac{962.234}{-38,01} = -25.315 \text{ cm}^3$$

### 1.3 ESTADO LIMITE DE DESCOMPRESSÃO

É o estado no qual em um ou mais pontos da seção transversal a tensão é nula, não havendo tração no restante da seção (Figura 1.1).

O termo *descompressão* vem da idéia de que o carregamento externo, quando aplicado, descomprime a seção previamente comprimida pela protensão.

A verificação do estado limite de descompressão é feita no estágio I.

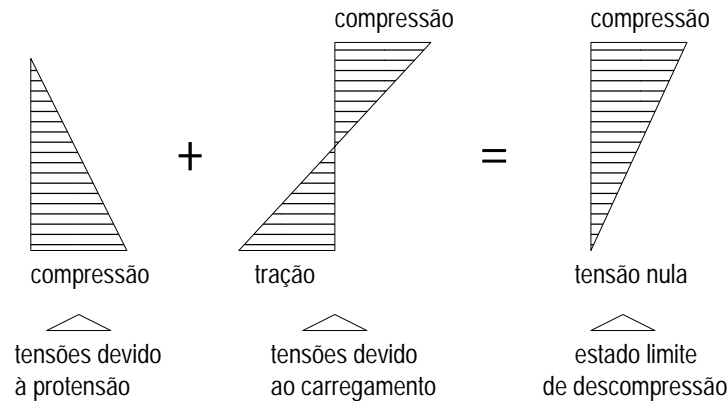


Figura 1.1 - Estado limite de descompressão

### 1.4 ESTADO LIMITE DE FORMAÇÃO DE FISSURAS

É o estado em que se inicia a formação de fissuras. O cálculo é feito no estágio Ib, conforme indicações da NBR 6118. A NBR 7197 admite, no seu anexo, verificação simplificada no estágio Ia, tomando-se como valor limite da tensão de tração:

1,5  $f_{ctk}$  para seções retangulares;

1,2  $f_{ctk}$  para seções T ou duplo T.

e admitindo para a razão entre os módulos de deformação os valores:

$\alpha_e = 15$  para carregamentos frequentes ou quase permanentes

$\alpha_e = 10$  para carregamentos raros

Ações a considerar:

- para as combinações frequentes de utilização:

$$F_{d,uti} = \sum_{i=1}^m G_i + \psi_1 Q_1 + \sum_{j=2}^n \psi_{2j} Q_j \quad (1-1)$$

- para as combinação rara de utilização:

$$F_{d,uti} = \sum_{i=1}^m G_i + Q_1 + \sum_{j=2}^n \psi_{1j} Q_j \quad (1-2)$$

Os valores de  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são definidos pela NBR 8681 ou por normas específicas referentes ao tipo de construção considerada.

## 1.5 ESTADO LIMITE DE ABERTURA DE FISSURAS

É o estado em que as fissuras se apresentam com aberturas características de valores especificados. De acordo com as indicações da NBR 6118 e as suas alterações constantes do anexo da NBR 7197, a verificação é feita considerando-se estágio II (concreto fissurado à tração e comportamento elástico dos materiais), admitindo-se para a razão entre os módulos de deformação o valor  $\alpha_e = 15$ .

Para cada elemento ou grupo de elementos das armaduras passiva e de protensão (excluindo-se os cabos protendidos que estejam dentro de bainha, os quais não são levados em conta no cálculo da fissuração) deve-se considerar uma área  $A_{cr}$  do concreto de envolvimento, constituída por um retângulo cujos lados não distam mais de  $7\phi$  do contorno do elemento da armadura (Figura 1.2).

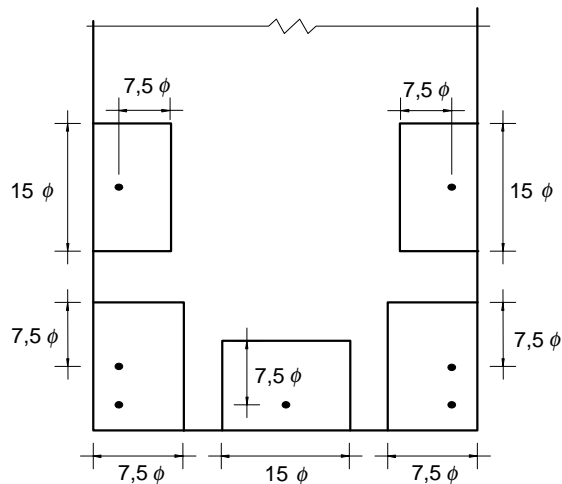


Figura 1.2 - Critérios para determinação das áreas para verificação da fissuração.

De acordo com a NBR 6118, admite-se, com razoável probabilidade, que a condição  $w_k \leq 0,2$  mm ocorre quando se verificam simultaneamente as seguintes desigualdades:

$$\frac{\phi}{2\eta_b - 0,75} \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \left( \frac{4}{\rho_r} + 45 \right) > 2 \quad (1-3)$$

$$\frac{\phi}{2\eta_b - 0,75} \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \frac{3\sigma_s}{f_{tk}} > 2 \quad (1-4)$$

onde  $\phi$  = diâmetro das barras em mm.



A verificação da fissuração deve ser feita para cada área de envolvimento, com as seguintes alterações em relação ao texto original da NBR 6118:

$\rho_r$  = é a taxa da armadura (passiva e protendida que não esteja em bainha), em relação à respectiva área  $A_{cr}$ , isto é,  $\rho_r = \frac{A_s}{A_{cr}}$

$\sigma_s$  = é o acréscimo de tensão no centro de gravidade da armadura de tração considerada, calculado no estágio II, que ocorre entre o estado convencional de neutralização, conforme 9.2.1.2. da NBR 7197, e o estado de carregamento considerado. Neste cálculo deve ser levada em conta a totalidade da armadura de tração, inclusive os cabos que estejam em bainha. Quando o cobrimento  $c$  da armadura longitudinal de tração que compõe a taxa  $\rho_r$  for superior ao mínimo exigido, é permitido aumentar o valor limite da abertura das fissuras de até 50%, proporcionalmente ao valor do quociente  $c/c_{min}$ .

As equações (1-3) e (1-4) têm sua origem em expressões originalmente obtidas para barras de aço de alta aderência. O primeiro termo, que envolve o coeficiente de conformação superficial ( $\eta_b$ ), generaliza as expressões para qualquer condição de aderência das barras.

O coeficiente de conformação superficial ( $\eta_b$ ), de acordo com a NBR 7480, pode ser admitido igual a 1,0 para barras lisas e 1,5 para barras de alta aderência.

### 1.5.1 Considerações sobre a abertura de fissuras

Em geral, a fissuração é um fenômeno indesejável por várias razões, tais como efeito estético desagradável, prejuízo no desempenho quanto à durabilidade, impermeabilidade, etc. A principal razão da fissuração em elementos de concreto armado é a baixa resistência à tração do concreto. Com a utilização de aços de alta resistência, as deformações específicas que ocorrem nas armaduras são de tal magnitude que o concreto não consegue acompanhá-las, dando origem às fissuras.

No projeto de elementos estruturais de concreto armado e protendido, procura-se garantir, com determinada segurança, que as fissuras que venham a ocorrer apresentem aberturas menores do que as máximas, consideradas nocivas. A verificação do estado limite de abertura de fissuras, proposta pela normalização brasileira, se baseia nessa idéia.

A avaliação quantitativa da abertura de fissuras é influenciada por vários fatores e está sujeita a uma grande variabilidade. Dentre esses fatores, destacam-se: a taxa de armadura, a tensão no aço, a qualidade da aderência dos fios, o arranjo da armadura, a forma das malhas e o espaçamento entre as barras.

Através de um detalhamento de armaduras adequado, é possível limitar a abertura de fissuras a valores pequenos, de forma que a aparência e o desempenho da estrutura não sejam prejudicados. O valor admissível para abertura de fissuras em estruturas de concreto armado varia na faixa de 0,1 a 0,4 mm. Para concreto protendido esse valor é limitado a 0,2 mm.

O controle da fissuração pode ser feito de diversas maneiras, a saber:

1. Através de um grau de protensão tal que  $M_{g+\psi q} = M_p$ , onde  $M_p$  é o momento de protensão e  $\psi q$  corresponde à parcela da carga acidental que ocorre com frequência. A armadura passiva necessária é, na maioria dos casos, a armadura mínima.

2. Através de um grau de protensão tal que  $M_p \cong M_g$  ou até mesmo  $M_p = 0,8 M_g$ . Neste caso a armadura adotada deverá ser tal que garanta a capacidade resistente e o limite  $w_{adm}$  para a carga de utilização total.
3. Através de um grau de protensão ainda menor, ou até mesmo sem protensão. A limitação da abertura das fissuras cabe então integralmente à armadura passiva (Leonhardt, 1979).
4. Atendendo a certas condições e regras de detalhamento, estabelecidas a partir de estudos experimentais, que dispensam a verificação de fissuração para a maioria dos casos em edificações comuns (CEB, 1990; Holck, 1991).

## 1.5.2 Proposições do Código Modelo do CEB/FIP, versão de 1990

### 1.5.2.1 Comentários preliminares

O controle da abertura de fissuras em peças de concreto armado e protendido tem sido considerado, há muito tempo, um meio eficaz de prevenir a corrosão da armadura. Até recentemente, era de consenso que fissuras de pequena abertura impediam a penetração de agentes agressivos e o conseqüente processo de corrosão do aço da armadura.

Os primeiros estudos realizados com o objetivo de avaliar a abertura de fissuras em peças de concreto fletidas, iniciados na década de 60, partiram de um modelo de cálculo que considerava uma porção da zona tracionada das peças como um tirante fictício de concreto. Esse modelo é representado por fórmulas matemáticas, estabelecidas a partir de ensaios em tirantes reais submetidos à tração pura, e estabelece que a abertura de fissuras é proporcional ao diâmetro das barras da armadura, ao espaçamento entre fissuras e ao cobrimento das barras da armadura.

O CEB adotou o modelo do tirante fictício durante muito tempo, até que surgiu uma corrente divergente de opinião que considera incoerentes as exigências de detalhamento resultantes da aplicação desse modelo. Os adeptos dessa nova corrente consideram que:

- o tempo necessário para a corrosão total de uma barra de grande diâmetro é muito maior do que para uma barra de pequeno diâmetro;
- um cobrimento de boa espessura, executado em concreto de boa qualidade e bem compactado é mais efetivo na proteção das armaduras do que um cobrimento fino e de difícil compactação;
- em termos quantitativos, poucas fissuras, ainda que de abertura relativamente grande, expõem menos a armadura ao meio ambiente do que uma grande quantidade de pequenas fissuras próximas umas das outras.

O texto sobre fissuração do CM 90 do CEB foi elaborado levando-se em conta as ponderações das diversas correntes de opinião, já que os argumentos apresentados por cada uma delas são de relevância considerável. Em decorrência disso, suas proposições apresentam algumas diferenças em relação às versões anteriores, como por exemplo:

- foi suprimido o conceito de sensibilidade à corrosão das armaduras, permanecendo apenas a distinção entre armadura passiva e armadura protendida;
- foi suprimido também o estado limite de formação de fissuras. A resistência à tração do concreto não é efetivamente considerada;

- para concreto protendido, a verificação de fissuração é feita apenas para a combinação frequente de cargas.

### 1.5.2.2 Classes de exposição

O CM 90 fixa as classes de exposição das estruturas em função das condições ambientais, conforme a Tabela 1.1, da qual foram suprimidas as situações que envolvem congelamento.

TABELA 1.1 - Classes de exposição em função do meio ambiente (CEB, 1990)

Classes de Exposição	Condições Ambientais
1) Ambiente seco	- Interior de edifícios normais (1)
2) Ambiente úmido	- Interior de edifícios com alta umidade (2) - Peças externas - Peças em contato com o solo ou águas não agressivas
3) Ambiente úmido sujeito a congelamento	
4) Ambiente marinho	- Peças total ou parcialmente imersas na água do mar ou situadas na zona de borrifamento - Peças em atmosfera marinha saturada (maresia)
As categorias a seguir ocorrem isoladamente ou em combinação com as acima	
5) Ambiente quimicamente agressivo	A - Agressividade química leve - Atmosfera industrial agressiva B - Agressividade química moderada C - Agressividade química severa

(1) Esta classe só é válida se durante a construção a estrutura não ficar exposta a condições mais severas durante um período de vários meses.

(2) Por exemplo em lavanderias industriais.

### 1.5.2.3 Valor limite da abertura de fissuras para concreto protendido

O valor de  $w_{lim}$  para concreto protendido é dado na Tabela 1.2, de acordo com a classe de exposição.

TABELA 1.2 - Valor limite da abertura de fissuras para concreto protendido (CEB, 1990)

Classes de Exposição	Abertura ( $w_{lim}$ )	
	Pós-tração	Pré-tração
1	0,2 mm	0,2 mm
2	0,2 mm	estado limite de descompressão
3 e 4	A - estado limite de descompressão B - 0,2 mm com proteção	

#### 1.5.2.4 Regras práticas para o controle de fissuração na flexão

Em peças fletidas com altura total igual ou inferior a 20 cm o controle de fissuração pode ser dispensado. Em peças com altura maior o controle pode ser feito através de regras de detalhamento que definem o diâmetro e o espaçamento máximos das barras, conforme indicado as Tabelas 1.3 e 1.4. O uso dessas tabelas está condicionado à adoção da armadura mínima para controle da fissuração.

Para o concreto protendido, a tensão no aço da armadura passiva para entrada nas Tabelas 1.3 e 1.4 é calculada a partir da combinação freqüente de cargas, considerando-se a seção fissurada. Se forem atendidos os limites de qualquer uma das duas tabelas, a verificação da fissuração fica satisfeita, sem exigência de simultaneidade.

TABELA 1.3 - Diâmetros máximos para dispensa do controle de fissuração

Diâmetro Máximo (mm)		
Tensão no aço (MPa)	Concreto Armado	Concreto Protendido
160	32	25
200	25	16
240	20	12
280	16	8
320	12	6
360	10	5
400	8	4
450	6	-

TABELA 1.4 - Espaçamento máximo de barras para dispensa do controle de fissuração

Espaçamento Máximo (mm)		
Tensão no aço (MPa)	Concreto Armado	Concreto Protendido
160	300	200
200	250	150
240	200	100
280	150	50
320	100	-
360	60	-

Nota: A tensão no aço referida nas Tabelas 1.3 e 1.4 corresponde à armadura passiva.

#### 1.6 ESTADO LIMITE DE COMPRESSÃO EXCESSIVA

Estado em que as tensões de compressão na seção transversal de peças fletidas atingem o limite convencional de  $0,7 f_{ckj}$ . O cálculo é feito no estágio I, admitindo-se portanto o concreto em regime elástico-linear. A resistência  $f_{ckj}$  é a resistência característica do concreto à compressão aos  $j$  dias de idade.

Essa verificação deve ser considerada apenas na fase de aplicação da protensão. As tensões normais consideradas devem ser aquelas produzidas pelas cargas atuantes nessa fase. O valor de referência da força de protensão, neste caso, é  $P_o$ , ou seja, a força de protensão que efetivamente produz tensões no concreto. Deve-se descontar as perdas por acomodação na ancoragem e por atrito, quando for o caso.

## 1.7 ESTADO LIMITE DE DEFORMAÇÕES EXCESSIVAS

### 1.7.1 Comentários preliminares

Usualmente, a verificação das deformações em peças de concreto armado é feita através do cálculo da flecha elástica instantânea provocada pelas ações atuantes. Resultados práticos têm demonstrado que este procedimento conduz a valores bem inferiores aos reais. Após a aplicação do carregamento, com o decorrer do tempo, a deformação lenta produz um aumento na deformação da peça que pode chegar a valores três vezes maiores que os iniciais.

Deformações excessivas no concreto conduzem à fissuração e conseqüente perda de rigidez da seção. Em peças de concreto protendido, uma avaliação cuidadosa das deformações, bem como o dimensionamento da força e da armadura de protensão são fundamentais para o bom comportamento da estrutura. Uma protensão subestimada pode resultar em flechas excessivas. Em contrapartida, uma protensão superestimada pode produzir contraflechas excessivas, igualmente problemáticas.

Uma avaliação cuidadosa das deformações de um elemento estrutural permite ainda, na fase de projeto, a adoção de medidas para contornar o problema de flechas excessivas como, por exemplo, a utilização de contraflecha no escoramento ou aumento da força de protensão.

### 1.7.2 Tipos de Deformações (Silva, 1992)

As deformações no concreto podem ser classificadas em deformações que dependem do carregamento e deformações independentes do carregamento.

As deformações que dependem do carregamento têm direção definida, destacando-se a deformação elástica instantânea, a deformação elástica retardada e a fluência. A primeira ocorre por ocasião da aplicação da carga e é reversível; a segunda ocorre com o passar do tempo, enquanto o carregamento estiver aplicado, confundindo-se com a fluência, que é definida como aumento de deformação sob tensão constante, sendo uma deformação plástica. Por questão de simplificação, a deformação elástica retardada e a fluência são tratadas juntas, sob a designação de deformação lenta.

As deformações independentes do carregamento não têm direção definida, sendo freqüentemente chamadas de variação de volume. A retração ocorre quando uma peça de concreto, em contato com o ar livre, perde parte da água quimicamente dissociada durante a secagem. Nesse processo, a água é inicialmente expulsa das fibras externas, criando deformações diferenciais entre a periferia e o miolo da peça, produzindo tensões próprias, auto-equilibradas em seu conjunto. Uma outra causa deste tipo de deformação é a variação de temperatura.

### 1.7.3 O Estado Limite de Deformações Excessivas

O estado limite de deformações excessivas corresponde à situação em que as flechas atingem os limites estabelecidos para a utilização normal da construção. A verificação é feita no estágio I ou II, conforme o caso, devendo-se atender ao disposto na NBR 6118 e na NBR 7197.

Segundo o Anexo da NBR 7197, para a verificação da segurança em relação ao estado limite de deformações excessivas, devem ser admitidas as combinações quase-permanentes de utilização, nas quais todas as ações variáveis são consideradas com seus valores quase-permanentes  $\psi_2 \cdot Q_j$ , sendo:

$$F_{d,uti} = \sum_{i=1}^m G_i + \sum_{j=1}^n \psi_{2j} Q_j \quad (1-5)$$

A verificação da segurança em relação ao estado limite de deformações excessivas pode ser feita no estágio I ou no estágio II, admitindo-se para a razão entre os módulos de deformação do aço e do concreto o valor  $\alpha_e = 15$  e considerando a fluência do concreto para os carregamentos de longa duração.

Deve-se considerar também as flechas negativas (contraflechas ou curvatura para cima, no caso de vigas) que podem surgir quando a relação peso próprio/sobrecarga for pequena e o grau de protensão for alto, particularmente quando a protensão for efetuada muito cedo, ou seja, quando a idade efetiva do concreto ainda é pequena.

Os limites para as flechas são determinantes para a capacidade de utilização das peças e freqüentemente determinam a escolha do grau de protensão, ou seja, muitas vezes, numa primeira tentativa, a força de protensão estimada atende aos limites de tensão impostos porém a deformação da peça é maior que a permitida, o que pode ser resolvido com um aumento da força de protensão.

Pode-se também influenciar nas deformações através de uma escolha conveniente da seção transversal, adotando-se banzos de concreto suficientemente grandes para a zona tracionada previamente comprimida. Considerando esse ponto de vista, as vigas com seção em caixão são sempre muito mais favoráveis que as vigas T.

### 1.7.4 Efeito da fluência do concreto para os carregamentos de longa duração

Como conseqüência da deformação lenta do concreto, decorrente da atuação de cargas de longa duração, a deformação específica imediata  $\epsilon_c$  no bordo comprimido das peças fletidas se transforma ao longo do tempo em  $(1+\phi_t)\epsilon_c$ , sendo  $\phi_t$  o coeficiente de fluência. Considera-se, para efeito de cálculo, que a deformação da armadura tracionada se mantém praticamente constante. Assim, pode-se escrever as expressões das curvaturas inicial e final simplificada, da seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_o = \frac{|\epsilon_c| + \epsilon_s}{d} \quad (1-6)$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_\infty = \frac{(1+\phi_t)|\epsilon_c| + \epsilon_s}{d} \quad (1-7)$$

A NBR 6118 permite, então, que no caso de ações de longa duração (peso próprio, revestimentos, protensão, etc.), a deformação final  $f_\infty$  seja avaliada multiplicando-se o valor

da flecha imediata  $f_o$  pela relação entre as curvaturas final e inicial da seção de maior momento em valor absoluto, ou seja

$$f_{\infty} = f_o \frac{(1 + \phi_t) \epsilon_c + \epsilon_s}{\epsilon_c + \epsilon_s} \quad (1-8)$$

A NBR 6118 sugere ainda os seguintes valores médios simplificados para  $\phi_t$ , que normalmente se aproximam dos valores calculados para os casos correntes:

- no caso de ações de longa duração, aplicadas logo após o término da construção:  $(1 + \phi_t) \cong 3$
- no caso de as referidas ações só serem aplicadas pelo menos seis meses após a concretagem:  $(1 + \phi_t) \cong 2$

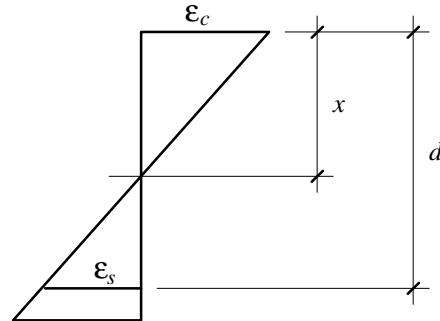
No caso de ações de longa duração aplicadas logo após o término da construção, em que  $(1 + \phi_t) \cong 3$ , pode-se desenvolver a relação entre as curvaturas final e inicial, de forma que

$$\frac{\left(\frac{1}{r}\right)_{\infty}}{\left(\frac{1}{r}\right)_o} = \frac{3\epsilon_c + \epsilon_s}{\epsilon_c + \epsilon_s} = \frac{3\frac{\epsilon_c}{\epsilon_s} + 1}{\frac{\epsilon_c}{\epsilon_s} + 1} \quad (1-9)$$

Considerando a compatibilidade de deformações, de acordo com a hipótese de Bernoulli, pode-se escrever

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_s}{d - x}$$

$$\therefore \frac{\epsilon_c}{\epsilon_s} = \frac{x}{d - x} = \frac{\frac{x}{d}}{1 - \frac{x}{d}}$$



chamando  $\beta_x = \frac{x}{d}$

$$\text{então } \frac{\epsilon_c}{\epsilon_s} = \frac{\beta_x}{1 - \beta_x} \quad (1-10)$$

Substituindo (1-10) em (1-9):

$$\frac{\left(\frac{1}{r}\right)_{\infty}}{\left(\frac{1}{r}\right)_o} = \frac{3\left(\frac{\beta_x}{1 - \beta_x}\right) + 1}{\left(\frac{\beta_x}{1 - \beta_x}\right) + 1} = \frac{3\beta_x + 1 - \beta_x}{\beta_x + 1 - \beta_x} = 2\beta_x + 1 \quad (1-11)$$

Para peças no estágio I,  $\beta_x$  pode ser adotado igual a 0,7 de onde resulta que

$$\frac{\left(\frac{1}{r}\right)_{\infty}}{\left(\frac{1}{r}\right)_o} = 2,4 \quad (1-12)$$

Como o deslocamento transversal é diretamente proporcional à curvatura, pode-se escrever que

$$f_{\infty} = 2,4 f_o$$

Para a combinação quase-permanente de utilização, a flecha final pode ser obtida em função da carga de cálculo determinada através da eq. (1-13).

$$F_{d,uti} = \sum_{i=1}^m 2,4 G_i + \sum_{j=1}^n \psi_{2j} Q_j \quad (1-13)$$

O procedimento proposto pela NBR 6118 é uma aproximação. Se o coeficiente de fluência ( $\phi_t$ ) do concreto é conhecido, pode-se utilizar a eq. (1-8) ou multiplicar as cargas de longa duração por  $(1+\phi_t)$  para considerar o efeito da fluência sobre as deformações. Ou seja, a flecha será calculada para  $F_d$  dada por

$$F_{d,uti} = \sum_{i=1}^m (1+\phi_t) G_i + \sum_{j=1}^n \psi_{2j} Q_j \quad (1-14)$$

Essa abordagem, apesar de ser também uma aproximação, conduz a uma avaliação mais acurada da influência da deformação lenta na flecha final, uma vez que permite considerar particularidades como: características do concreto utilizado, idade e geometria da peça, efeito da temperatura e da umidade no envelhecimento do concreto. Assim, pode-se considerar as características distintas para cada situação prática, fazendo-se uma análise mais individualizada. Esse processo é, evidentemente, mais indicado, devendo ser utilizado sempre que possível.



## **ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS**

---

### **2.1 INTRODUÇÃO**

No cálculo de peças de concreto armado, o dimensionamento é feito considerando os estados limites últimos e posteriormente são verificados os estados limites de utilização.

No cálculo de peças de concreto protendido, o dimensionamento é feito considerando os estados limites de utilização e, posteriormente, são verificados os estados limites últimos. Assim, durante a fase de dimensionamento, são empregados no cálculo os valores característicos das ações e das resistências dos materiais, ou seja, sem coeficientes de ponderação. Para a verificação dos estados limites últimos são então aplicados os coeficientes de ponderação tanto sobre as cargas como sobre as resistências, obtendo-se assim seus valores de cálculo.

Os tipos de ruptura que ocorrem nas vigas protendidas com cabos aderentes são os mesmos que ocorrem nas vigas de concreto armado. Assim, para as peças de concreto protendido, com aderência inicial ou posterior, o cálculo deve ser feito conforme as indicações da NBR 6118, ressalvadas as exigências da NBR 7197 e considerando o efeito da protensão.

O dimensionamento da armadura passiva no concreto protendido é feito semelhantemente ao utilizado para peças de concreto armado. No estágio de ruptura, a armadura protendida funciona como uma armadura de tração, de maneira idêntica à armadura das peças de concreto armado. A diferença principal consiste no pré-alongamento da armadura protendida, ou seja, a deformação do aço devido à protensão. O alongamento da armadura ativa devido à flexão da peça deve ser somado ao pré-alongamento, ou alongamento inicial.

É importante notar que, sem o alongamento prévio devido à protensão, não seria possível utilizar os aços tipo CP como armadura passiva em peças de concreto armado. Se parte do alongamento que o aço é capaz de sofrer não fosse aplicada previamente através da protensão, a zona comprimida do concreto não resistiria às deformações que lhe seriam impostas pela rotação da seção.

## 2.2 ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS DEVIDO A SOLICITAÇÕES NORMAIS

### 2.2.1 Estado limite último de ruptura ou alongamento plástico excessivo

### 2.2.2 Domínios de deformação

Os domínios de deformação estabelecem as possíveis posições da seção transversal no instante da ruptura, conforme o tipo de solicitação atuante.

Nas vigas subarmadas e normalmente armadas, a ruptura tem início devido ao alongamento excessivo das armaduras ativa e passiva, acompanhado de fissuração da viga. Com o aumento gradativo do carregamento, as deformações e a fissuração aumentam, redundando em elevação da linha neutra, redução da área de concreto comprimido e conseqüente aumento das tensões de compressão no concreto. Quando a tensão de compressão atinge o valor da resistência do concreto, este é esmagado provocando o colapso da viga. Esse mecanismo de ruptura apresenta uma grande vantagem, qual seja, que as flechas e as fissuras, decorrentes do alongamento da armadura, se mostram bastante visíveis alertando sobre a aproximação do colapso (*comportamento dúctil*). Obviamente é de grande interesse, no projeto de estruturas de concreto, dimensionar as vigas de maneira que tenham ruptura dúctil.

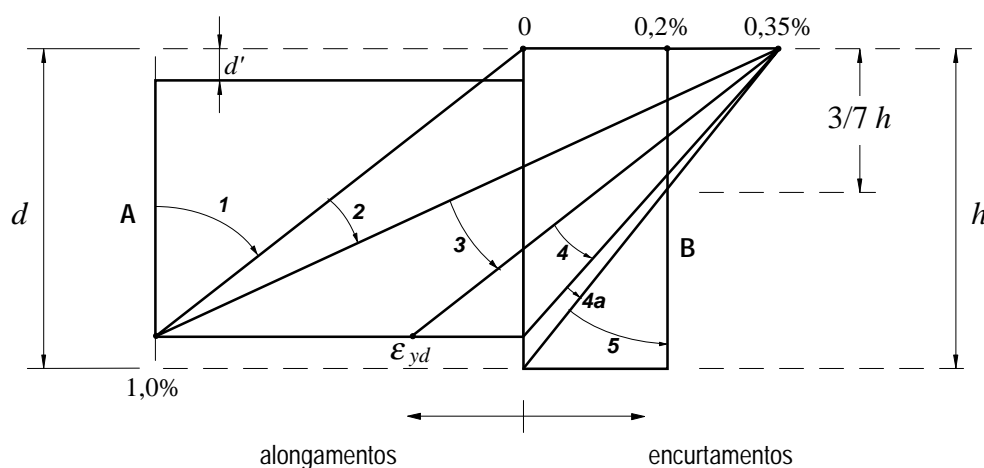


Figura 2.1 - Domínios de deformação

Nas vigas superarmadas, ou seja, com elevadas quantidades de armação, o concreto da zona comprimida da seção é esmagado antes que o aço atinja o limite de escoamento. Nesses casos ocorre a chamada ruptura brusca, sem aviso, o que é, evidentemente, indesejável do ponto de vista da segurança da estrutura.

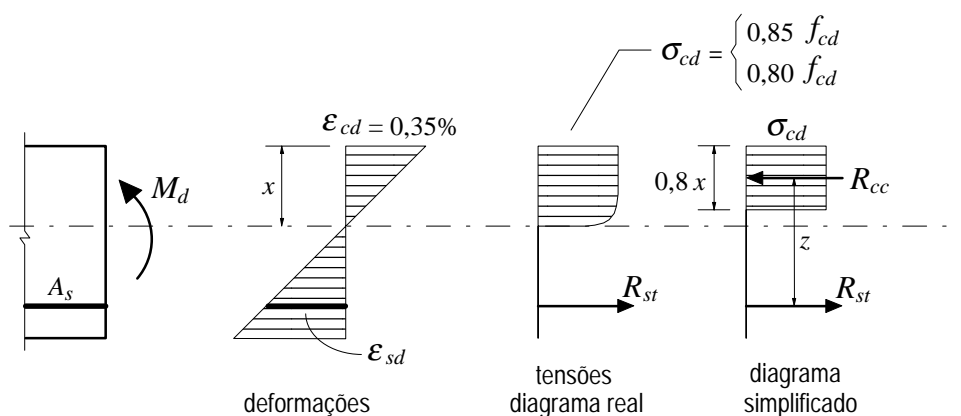
Em vez da carga de colapso, adota-se como *estado limite último* um estado de deformação (anterior ao colapso), para o qual a viga já pode ser considerada inutilizada (Figura 2.2). O dimensionamento deve ser feito de tal maneira que a deformada da seção permaneça no domínio 3 (domínio das peças normalmente armadas), ou seja, com  $\epsilon_{cd} = 0,35\%$  e  $\epsilon_{yd} \leq \epsilon_{sd} \leq 1,0\%$ .

### 2.2.3 Hipóteses de cálculo

Para as peças de concreto protendido, com aderência inicial ou posterior, o cálculo deve ser feito conforme a NBR 6118, em relação ao estado limite último de ruptura ou alongamento plástico excessivo, tomando-se como situação inicial o estado de neutralização, definido em 2.2.1.4. Considera-se que o estado limite último de alongamento plástico excessivo é atingido quando o alongamento da armadura mais tracionada alcança o valor de 1,0%, medido a partir do estado convencional de neutralização.

As hipóteses de cálculo são as seguintes:

- As seções permanecem planas após a deformação.
- Admite-se aderência integral entre o aço e o concreto. Logo, as deformações dos dois materiais na região de contato são consideradas iguais.
- O encurtamento de ruptura do concreto vale 0,2% na compressão axial e 0,35% na flexão.
- A alongamento máximo permitido convencional para os aços é de 1,0% a fim de se evitar deformações plásticas excessivas. É importante lembrar que nas peças de concreto protendido esse alongamento máximo é contado a partir do estado convencional de neutralização.
- O diagrama tensão-deformação do concreto é o parábola retângulo podendo ser substituído por um diagrama retangular simplificado, de altura igual a  $0,8x$  (Figura 2.2).



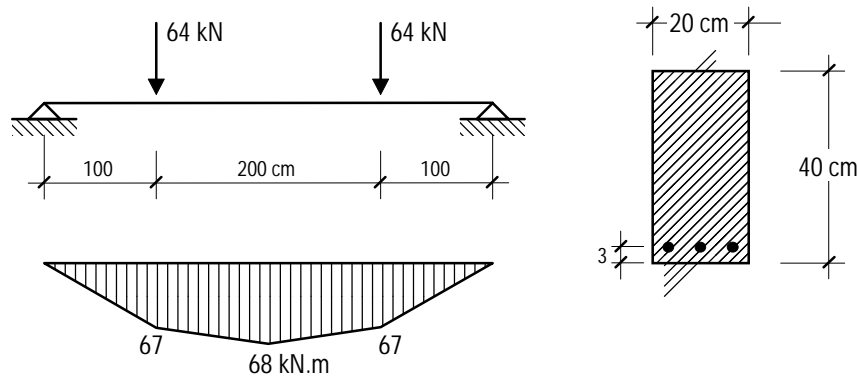
equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \sum H = 0 & \quad R_{cc} = R_{st} \\ \sum M = 0 & \quad M_u = R_{cc} \cdot z = R_{st} \cdot z \end{aligned}$$

Figura 2.2 - Hipóteses de cálculo para vigas de concreto armado no estado limite último.

### 2.2.3.1 Exemplo 1 - Verificação de uma viga de C.A. no estado limite último

Dimensionar a armadura longitudinal para a viga abaixo, no limite entre os domínios 3 e 4, considerando as dimensões da seção de concreto fixadas:



Dados dos materiais:

$$f_{ck} = 18 \text{ MPa}$$

aço CA 50A

$$\epsilon_{yd} = 0,207\%$$

Carregamento:

- peso próprio:  $g = 0,20 \times 0,40 \times 25 = 2 \text{ kN/m}$

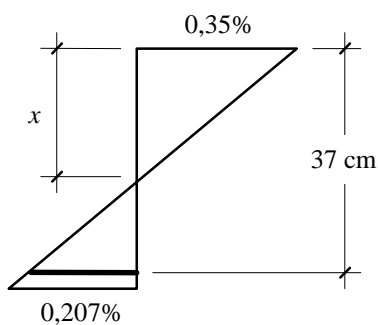
$$M_k = 6.800 \text{ kN.cm}$$

No limite entre os domínios 3 e 4:

$$\epsilon_{cd} = 0,35\%$$

$$\epsilon_{sd} = \epsilon_{yd} = 0,207\%$$

Partindo das deformações no aço e no concreto, é possível determinar a posição da linha neutra no estado limite último, bem como a capacidade resistente da seção.



Por semelhança de triângulos:

$$\frac{3,5}{x} = \frac{3,5 + 2,07}{37} \quad \therefore \quad x = 23,25 \text{ cm}$$

$$y = 0,8 x = 18,60 \text{ cm}$$

área de concreto comprimido:

$$A_{cc} = y \times 20 = 372 \text{ cm}^2$$

$$R_{cc} = A_{cc} \times 0,85 f_{cd} = 372 \times 0,85 \frac{1,8}{1,4} = 406,54 \text{ kN}$$

$$z = d - \frac{0,8 x}{2} = 37 - \frac{18,60}{2} = 27,70 \text{ cm}$$

Cálculo do momento resistente último da seção:

$$M_u = R_{cc} \times z = 406,54 \times 27,70 = 11.261 \text{ kN.cm}$$

$$M_d = 1,4 M_k = 1,4 \times 6.800 = 9.520 \text{ kN.cm}$$

$$M_u > M_d$$

Nota: Se for colocada na seção uma armadura tal que garanta que a deformação máxima no aço seja de 0,207%, a seção resiste ao momento de cálculo atuante com folga.

Uma outra maneira de fazer a verificação é avaliar a posição da linha neutra para o momento de cálculo atuante. Caso a deformação correspondente da armadura se situe entre  $\epsilon_{yd}$  e 1,0% a seção estará no domínio 3. Pode-se então calcular a armadura necessária da seguinte forma:

Do cálculo do somatório de momentos em relação a um ponto na altura da armadura, vem que:

$$M_d = R_{cc} \times z \quad \text{onde } z = d - 0,4x$$

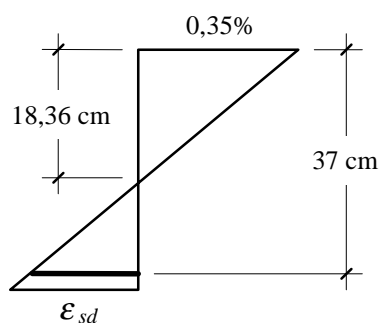
então,

$$9.520 = 0,8x \times b \times 0,85 \times f_{cd} \times z$$

$$9.520 = 0,8 \cdot 20 \cdot 0,85 \cdot \frac{1,8}{1,4} \cdot x(37 - 0,4x)$$

$$0,4x^2 - 37x + 544,44 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 18,36 \text{ cm}$$

Para a nova posição da linha neutra:



$$\frac{3,5}{18,36} = \frac{3,5 + \epsilon_{sd}}{37} \quad \therefore \quad \epsilon_{sd} = 0,355\%$$

$$\epsilon_{yd} \leq \epsilon_{sd} \leq 1,0\% \quad \Rightarrow \quad \text{domínio 3 (Ok!)}$$

$$R_{cc} = 0,8 \times 18,36 \times 20 \times 0,85 \times 1,8/1,4 = 321 \text{ kN}$$

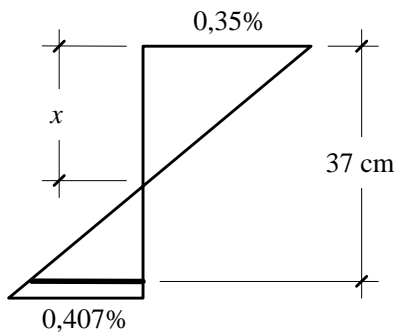
$$\Sigma H = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{st} = R_{cc}$$

$$R_{st} = A_s \cdot f_{yd}$$

$$A_s = \frac{R_{st}}{f_{yd}} = \frac{321}{\frac{50}{1,15}} = 7,38 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \text{armadura mínima necessária para suportar } M_d = 9.520 \text{ kN.cm com armadura simples.}$$

Nota: Se estivesse sendo utilizado aço CA 50B, para o qual  $\epsilon_{yd} = 0,407\%$ , a seção não passaria com armadura simples, uma vez que, para a deformação no aço de 0,407%,  $x$  seria menor que 18,36 cm e, portanto, a largura da faixa de concreto comprimido não seria suficiente para suportar  $M_d$ . Nesse caso, seria necessário utilizar armadura dupla.

Admitindo aço CA 50B:



$$\frac{3,5}{x} = \frac{3,5 + 4,07}{37} \quad \therefore \quad x = 17,11 \text{ cm}$$

$$z = 30,16 \text{ cm}$$

$$R_{cc} = 0,8 \times 17,11 \times 20 \times 0,85 \times \frac{1,8}{1,4} = 299,18 \text{ kN}$$

$$M_u = R_{cc} \times z = 29918 \times 30,16 = 902.329 \text{ kgf.cm}$$

$$M_u < M_d \Rightarrow \text{necessário armadura dupla}$$

$$R_{sc} = \frac{M_d}{z} - R_{cc} = \frac{9.520}{30,16} - 299,18 = 16,47 \text{ kN}$$

$$A'_s = \frac{R_{sc}}{f_{yd}} = \frac{16,47}{50/1,15} = 0,38 \text{ cm}^2$$

$$R_{st} = R_{cc} + R_{sc} = 299,18 + 16,47 = 315,65 \text{ kN}$$

$$A_s = \frac{R_{st}}{f_{yd}} = \frac{315,65}{50/1,15} = 7,26 \text{ cm}^2$$

$$A_s + A'_s = 7,26 + 0,38 = 7,64 \text{ cm}^2$$

#### 2.2.4 Estado de neutralização

O estado convencional de neutralização é obtido a partir da situação em que existem apenas os esforços devido à protensão (Figura 2.3a), acrescentando-se solicitações adequadas que tornem nulas as tensões no concreto em toda a seção transversal considerada (Figura 2.3b).

O limite convencional de 1,0% para a deformação no aço está relacionado à fissuração do concreto. Quando a deformação na armadura mais tracionada atinge um valor tão elevado, o concreto adjacente encontra-se fissurado e com abertura de fissuras muito grandes. Numa peça com fissuras espaçadas de 10 cm, por exemplo, uma deformação de 1,0% na armadura acarreta aberturas da ordem de 1,0 mm. Portanto, a deformação limite de 1,0% para a armadura deve ser medida a partir do estado de neutralização, isto é, deve-se considerar 1,0% além do pré-alongamento (Hanai, 1988).

#### 2.2.5 Diagrama tensão-deformação dos aços de protensão

Para efeito de dimensionamento das peças estruturais, permite-se o emprego de diagrama simplificado, análogo ao diagrama correspondente aos aços da classe B, especificado pela NBR 6118. Em casos particulares, pode ser empregado o diagrama tensão-deformação determinado experimentalmente com amostras de aço de protensão a ser efetivamente empregado (NBR 7197/89).

As TABELAS 2.1 e 2.2, elaboradas a partir de resultados de ensaios, fornecem valores de tensão para uma dada deformação no aço em regime inelástico.

TABELA 2.1 - Tensões no aço de protensão, no estado limite último

$\varepsilon_p$ (%)	$\sigma_p$ [kN/cm <sup>2</sup> ]			
	Barra CP 105	Fio CP 150 RN	Cordoalha CP 175 RB	Cordoalha CP 190 RB
0,5	70,00	98,00	100,00	100,00
0,6	70,00	104,00	118,00	120,00
0,7	70,00	110,00	128,00	132,00
0,8	70,00	112,00	133,00	141,00
0,9	70,00	116,00	138,00	147,00
1,0	71,00	117,00	140,00	149,00
1,1	72,00	118,00	141,00	151,00
1,2	73,00	118,00	142,00	153,00
1,3	74,00	119,00	143,00	154,00
1,4	76,00	119,00	145,00	156,00
1,5	77,00	120,00	146,00	157,00
1,6	78,00	120,00	147,00	158,00

$$\sigma_{pd} = \frac{\sigma_p}{\gamma_s} = \frac{\sigma_p}{1,15}$$

$\varepsilon_p$  representa a elongação total do aço de protensão, incluindo o alongamento dado na ocasião da protensão (Pfeil, 1984).

TABELA 2.2 - Tensões na armadura passiva, no estado limite último

$\varepsilon_s$ (%)	$\sigma_p$ [kN/cm <sup>2</sup> ]		
	CA 25	CA50	CA60
0,10	20,00	20,00	20,00
0,12	21,70	24,00	24,00
0,14	21,70	28,00	28,00
0,16	21,70	32,00	32,00
0,18	21,70	36,00	36,00
0,20	21,70	28,50	38,70
0,22	21,70	39,00	42,20
0,24	21,70	39,80	44,20
0,26	21,70	40,50	46,30
0,28	21,70	41,20	48,00
0,30	21,70	41,70	49,50
0,32	21,70	42,20	49,80
0,34	21,70	42,50	50,30
0,40	21,70	43,40	51,60
0,42	21,70	43,50	51,80
0,44	21,70	43,50	52,20
0,46	21,70	43,50	52,20

Os valores indicados para os aços CA 50 e CA 60 correspondem à fórmula do Código Modelo CEB 78 para aços encruados. Os valores são aplicáveis para aços tipo A e B, tomando-se  $\sigma_{sd} = f_{yk}/\gamma_s$  para valores de  $\varepsilon_s$  superiores aos da tabela.

## 2.2.6 Valor de cálculo da força de protensão

Genericamente, o valor de cálculo da força de protensão é obtido através da expressão

$$P_d = \gamma_p \cdot P_k \quad (2-1)$$

O coeficiente  $\gamma_p$  pode assumir valores diferenciados em virtude de o efeito da força de protensão ser favorável ou desfavorável para a situação considerada. A TABELA 2.3 apresenta os valores de  $\gamma_p$  recomendados pela NBR 7197 e pelo CEB para as situações em que o efeito da força de protensão é favorável ou desfavorável.

Quando existem cabos protendidos no banzo comprimido da peça, por exemplo, o efeito da protensão é desfavorável, ou seja, na eventualidade de o valor final da força de protensão ficar maior que o valor de projeto, por quaisquer razões, haverá um acréscimo de tensões de compressão nessa região da peça. Por esse motivo o coeficiente de segurança  $\gamma_p$  para essa situação vale 1,1.

Em contrapartida, para os cabos protendido posicionados no banzo tracionado o efeito da protensão é favorável porque combate as tensões de tração originariamente produzidas pelo carregamento externo.

**TABELA 2.3** - Valores do coeficiente de ponderação  $\gamma_p$  da força de protensão, para o estado limite último de ruptura ou alongamento plástico excessivo.

Norma	$\gamma_p$	
	situação desfavorável	situação favorável
CEB 90	1,1	1,0
NBR 7197	1,1	1,0

## 2.2.7 Cálculo do pré-alongamento

A Figura 2.3a representa a situação em que uma viga protendida está submetida apenas à força de protensão. A tensão normal no concreto na fibra correspondente ao centro de gravidade da armadura vale  $\sigma_{cp}$ .



**Figura 2.3** - (a) situação da peça de concreto quando atuam apenas os esforços de protensão; (b) estado convencional de neutralização.



A Figura 2.3b representa o estado convencional de neutralização, ou seja, uma situação fictícia obtida através da aplicação de uma força externa  $P_n = P + \Delta P$  de magnitude tal que anula a tensão no concreto na fibra correspondente ao centro de gravidade da armadura.

A deformação na armadura ativa, correspondente à força de neutralização  $P_n$ , é a chamada deformação de pré-alongamento, ou simplesmente pré-alongamento, designada por  $\varepsilon_{pn}$ .

O artifício acima, utilizado para anular as tensões no concreto, consiste em impor à armadura ativa uma deformação adicional igual à deformação sofrida pelo concreto em função da tensão de compressão  $\sigma_{cp}$ , num processo inverso ao que ocorre na pista de protensão com aderência inicial, quando os cabos são liberados das ancoragens e o esforço de protensão é transferido para o concreto.

$$\Delta\varepsilon_p = \frac{|\sigma_{cp}|}{E_c} = \frac{1}{E_p} \alpha_p |\sigma_{cp}| \quad (2-2)$$

Portanto, 
$$P_n = P + \alpha_p A_p |\sigma_{cp}| \quad (2-3)$$

e 
$$\varepsilon_{pn} = \frac{P_n}{A_p E_p} \quad (2-4)$$

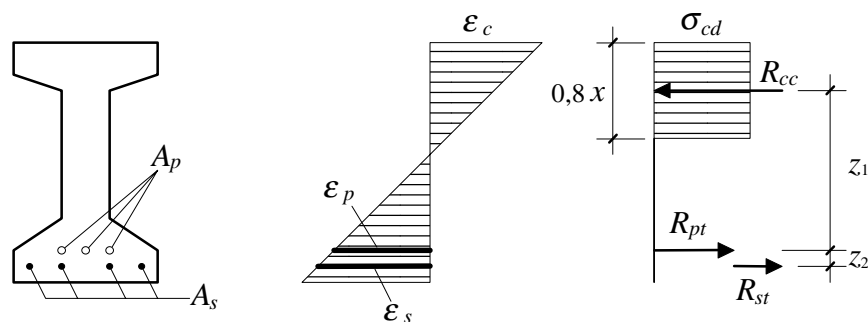
A NBR 7197 permite que o pré-alongamento seja calculado através da equação (2-4), sempre que a sollicitação normal devido ao peso próprio e as outras ações mobilizadas pela protensão forem inferiores a 90% da sollicitação total em serviço admitida no projeto.

### 2.2.8 Resistência da seção ao momento fletor

O procedimento de cálculo da capacidade resistente da seção consiste, basicamente, das seguintes etapas:

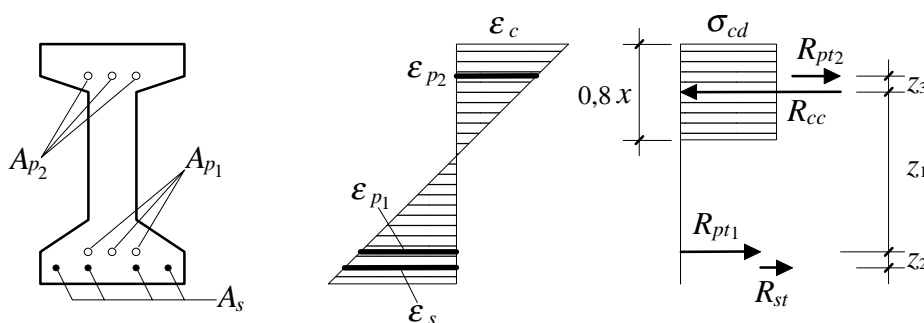
- determina-se o valor de cálculo da força de protensão;
- calcula-se o pré-alongamento;
- determina-se o alongamento e a respectiva tensão de tração no aço de protensão, em função da rotação da seção, provocada pelo momento fletor de cálculo. De posse desses dados, e através do diagrama de deformações, pode-se determinar: a posição da linha neutra; a resultante de compressão no concreto, a resultante de tração na armadura ativa; o braço de alavanca entre as resultantes de tração e compressão;
- verifica-se o equilíbrio. Caso a força de tração na armadura ativa seja menor que a força de compressão no concreto deve ser acrescentada uma armadura passiva suplementar. Caso a força de tração na armadura ativa seja maior ou igual à força de compressão no concreto, fica evidente que a armadura ativa é suficiente para suportar o carregamento atuante. Nesse caso, deve-se colocar a armadura passiva mínima recomendada pela norma, para a situação em questão.

Na Figura 2.4 estão representadas as configurações possíveis das armaduras ativa e passiva em vigas protendidas.



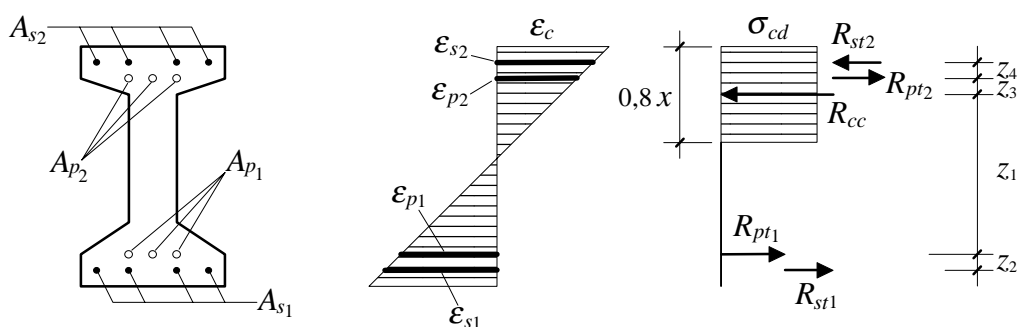
equações de equilíbrio:

(a)  $\Sigma H = 0 \quad R_{cc} = R_{pt} + R_{st}$   
 $\Sigma M = 0 \quad M_d = R_{cc} \cdot z_1 + R_{st} \cdot z_2$



equações de equilíbrio:

(b)  $\Sigma H = 0 \quad R_{cc} = R_{pt1} + R_{pt2} + R_{st}$   
 $\Sigma M = 0 \quad M_d = R_{pt1} (z_1) + R_{st} (z_1 + z_2) - R_{pt2} (z_3)$



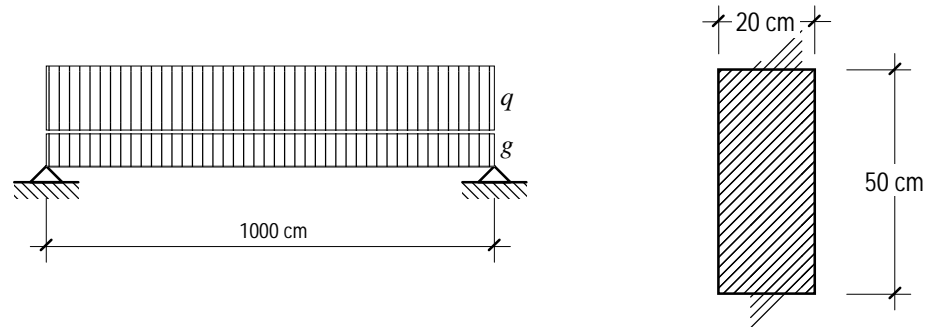
equações de equilíbrio:

(c)  $\Sigma H = 0 \quad R_{cc} + R_{st2} = R_{pt1} + R_{pt2} + R_{st1}$   
 $\Sigma M = 0 \quad M_d = R_{pt1} (z_1) + R_{st1} (z_1 + z_2) + R_{st2} (z_3 + z_4) - R_{pt2} (z_3)$

Figura 2.4 - Configurações possíveis de armaduras em vigas protendidas: (a) cabos protendidos no banzo tracionado da peça e armadura passiva simples; (b) cabos protendidos nos banzos tracionado e comprimido da peça e armadura passiva simples; (c) cabos protendidos nos banzos tracionado e comprimido da peça com armadura passiva dupla;

### 2.2.8.1 Exemplo 2 - Verificação de uma viga protendida no estado limite último

Dimensionar a armadura longitudinal para a viga abaixo, considerando as dimensões da seção de concreto fixadas. A protensão é dada em pista com cabos retos e excêntricos.



⇒ **Dados dos materiais:**

$$f_{ck} = 35 \text{ MPa} = 3,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_c = 0,9 \times 21.000 \sqrt{350 + 35} = 370.845 \text{ kgf/cm}^2 = 3.708,45 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{aço CA 50} \quad \epsilon_{yd} = 0,407\%$$

$$\text{aço CP 190 RB ( cordoalhas } \phi 12,7 \text{ mm )}$$

⇒ **Carregamento:**

$$\text{- peso próprio:} \quad g = 0,20 \times 0,50 \times 25 = 2,5 \text{ kN/m}$$

$$\text{- sobrecarga:} \quad q = 7,5 \text{ kN/m}$$

⇒ **Dados da protensão:**

Armadura de protensão:

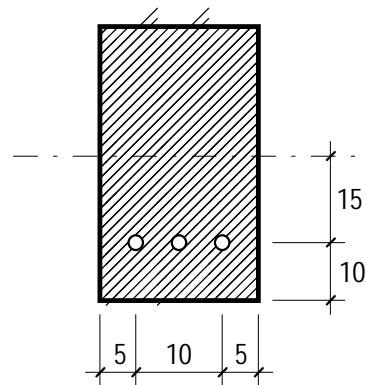
$$3 \phi 12,7 \Rightarrow A_p = 2,96 \text{ cm}^2$$

Força de protensão:

$$P_\infty = 326 \text{ kN}$$

Posição da armadura ativa:

$$e_p = 15,0 \text{ cm}$$



⇒ **Propriedades da seção transversal:**

$$A_c = 20 \times 50 = 1.000 \text{ cm}^2$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 50^3}{12} = 208.333 \text{ cm}^4$$

$$W = \frac{I}{y} = \frac{208.333}{25} = 8.333 \text{ cm}^3$$

$$\alpha_p = \frac{E_p}{E_c} = \frac{1.950.000}{370.845} = 5,26$$

$$A_{ch} = A_c - A_p + A_p \alpha_e = 1.000 - 2,96 + 2,96 \cdot 5,26 = 1.013 \text{ cm}^2$$

$$y_2 = \frac{\sum yA}{\sum A} = \frac{A_c \cdot y_1 + A_{ph}(y_1 - d_p^i)}{A_{ch}} = \frac{1.000 \times 25 + 15,57(25 - 10)}{1.013} = 24,91 \text{ cm}$$

$$I_{Aph} = A_{ph}(y_2 - c_p)^2 = 2,96 \times 5,26(24,91 - 10)^2 = 232 \text{ cm}^4$$

$$I_h = I + A_c(y_1 - y_2)^2 + I_{Aph} = 208.333 + 1.000(25 - 24,91)^2 + 232 = 208.573 \text{ cm}^4$$

$$y_s = 25,09 \text{ cm} \quad W_s = \frac{I_h}{y_s} = \frac{208.573}{25,09} = 8.313 \text{ cm}^3$$

$$y_i = 24,91 \text{ cm} \quad W_i = \frac{I_h}{y_i} = \frac{208.573}{24,91} = 8.373 \text{ cm}^3$$

**Esforços:**

$$M_g = \frac{g L^2}{8} = \frac{2,5 \times 10^2}{8} = 31,25 \text{ kN.m} = 3.125 \text{ kN.cm}$$

$$M_q = \frac{q L^2}{8} = \frac{7,5 \times 10^2}{8} = 93,75 \text{ kN.m} = 9.375 \text{ kN.cm}$$

**Valor de cálculo da força de protensão:**

$$P_d = \gamma_p \cdot P_\infty \quad (\text{no caso, situação favorável: } \gamma_p = 1,0)$$

$$P_d = 1,0 \times 326 = 326 \text{ kN}$$

### Cálculo do pré-alongamento:

- tensão no concreto ao nível da armadura de protensão:

$$\sigma_{cPd1} = \frac{P_d}{A_{ch}} + \frac{P_d \times e_p^2}{I_h} = \frac{326}{1.013} + \frac{326 \times 15^2}{208.573} = 0,673 \text{ kN/cm}^2$$

$$P_{nd} = P_d + \alpha_p A_p \sigma_{cPd} = 326 + 5,26 \times 2,96 \times 0,673 = 336 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_{pn} = \frac{P_{nd}}{E_p A_p} = \frac{336}{19.500 \times 2,96} = 5,821 \times 10^{-3}$$

### Resistência ao momento fletor:

No cálculo da capacidade resistente de vigas protendidas, a protensão é considerada como uma solitação interna. Logo, a seção geralmente estará submetida à flexão simples. Geralmente, apenas as solitações decorrentes dos hiperestáticos de protensão são consideradas como uma solitação externa.

De acordo com a NBR8681, a carga de cálculo para a combinação normal última é:

$$F_d = \sum_{i=1}^m \gamma_{gi} G_i + \gamma_{q1} Q_1 + \sum_{j=2}^n \gamma_{qj} \psi_{oj} Q_j$$

Assim,

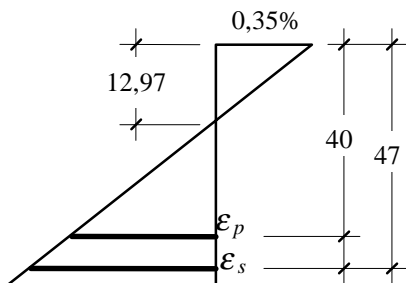
$$M_d = \gamma_g \cdot M_g + \gamma_q \cdot M_q = 1,4 \times 3.125 + 1,5 \times 9.375 = 18.438 \text{ kN.cm}$$

⇒ cálculo da altura mínima da linha neutra para que a seção suporte o momento fletor de cálculo atuante:

$$M_d = R_{cc} \times z = 0,8 x \cdot b \cdot 0,85 \cdot f_{cd} (d - 0,4 x)$$

$$18.438 = 0,8 x \times 20 \times 0,85 \times 3,5/1,4 (47 - 0,4 x)$$

$$13,60 x^2 - 1598 x + 18438 = 0 \quad \therefore \quad x = 12,97 \text{ cm}$$



$$\frac{0,35}{12,97} = \frac{0,35 + \varepsilon_p}{40} \quad \therefore \quad \varepsilon_p = 0,73 \%$$

$$\frac{0,35}{12,97} = \frac{0,35 + \varepsilon_s}{47} \quad \therefore \quad \varepsilon_s = 0,92 \%$$

A seção está no domínio 3 mas a deformação no aço ficou próxima o limite de 1,0%. Isto significa que a seção de concreto é grande para o carregamento atuante, ou seja, uma faixa de apenas 12,97 cm, numa seção de 50 cm de altura, é suficiente para resistir ao momento de cálculo atuante.

Para  $x = 12,97$  cm, tem-se que:

$$R_{cc} = 0,8 \times 12,97 \times 20 \times 0,85 \times 3,5/1,4 = 441 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_{pt} = \varepsilon_p + \varepsilon_{pn} = 0,73 + 0,58 = 1,31\%$$

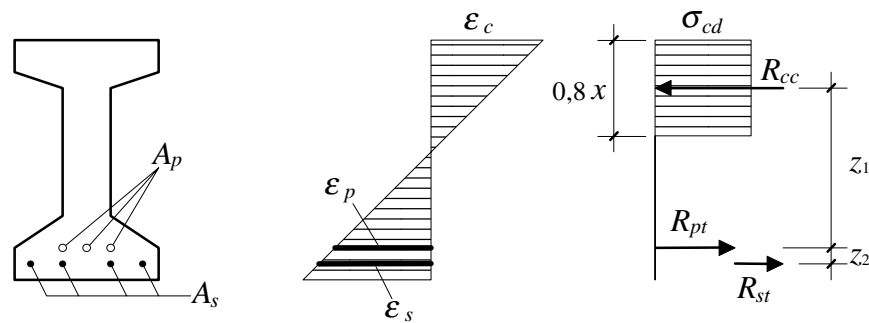
Da tabela 2.1, para  $\varepsilon_p = 1,31\% \Rightarrow \sigma_p = 154,2 \text{ kN/cm}^2$

$$\sigma_{pd} = \frac{\sigma_p}{\gamma_s} = \frac{154,2}{1,15} = 134,09 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Logo, } R_{pt} = \sigma_{pd} \times A_p = 134,09 \times 2,96 = 397 \text{ kN}$$

$R_{pt} = 397 \text{ kN} < R_{cc} = 441 \text{ kN} \Rightarrow$  a seção não está em equilíbrio.

Representação gráfica da situação:



Para que a seção esteja em equilíbrio, é necessário que:

$$R_{cc} = R_{pt} + R_{st}$$

$$\text{Daí: } R_{st} = R_{cc} - R_{pt} = 441 - 397 = 44 \text{ kN}$$

$$R_{st} = A_s \cdot f_{yd} \quad \therefore \quad A_s = \frac{R_{st}}{f_{yd}} = \frac{44}{50} \times 1,15 = 1,01 \text{ cm}^2$$

$$A_{smín} = 0,15\% b_w h = 0,0015 \times 20 \times 50 = 1,5 \text{ cm}^2$$

Como  $A_{smín} > A_s$ , adotar  $A_{smín} = 1,5 \text{ cm}^2$

$\phi$	área	$n$	$n \times \text{área}$	folga (%)	
4,0	0,126	12	1,512	0,8	
5,0	0,196	8	1,568	4,5	
6,3	0,312	5	1,560	4,0	
8,0	0,503	3	1,509	0,6	$\Rightarrow 3 \phi 8,0 \text{ mm}$
10,0	0,785	2	1,570	4,7	

## 2.2.9 Estado limite último de ruptura no ato da protensão

A NBR 7197 prescreve que a segurança em relação à ruptura no ato da protensão deve ser verificada conforme os procedimentos da NBR 6118 em relação ao estado limite último de ruptura ou alongamento plástico excessivo, respeitadas as seguintes hipóteses suplementares:

- a) Considera-se como resistência característica  $f_{ckj}$  do concreto aquela correspondente à idade do material no ato da protensão, não se tomando valores superiores à resistência característica especificada no projeto.
- b) Para esta verificação, admitem-se os seguintes valores dos coeficientes de ponderação:

$$\gamma_c = 1,2$$

$$\gamma_s = 1,15$$

$$\gamma_p = 1,0 \text{ na pré-tração}$$

$$\gamma_p = 1,1 \text{ na pós-tração}$$

$$\gamma_f = 1,0 \text{ para as ações desfavoráveis}$$

$$\gamma_f = 0,9 \text{ para as ações favoráveis}$$

Devem ser consideradas apenas as cargas que efetivamente possam atuar nessa ocasião.

### 2.2.9.1 Verificação simplificada

Admite-se que a segurança em relação ao estado limite último de ruptura no ato da protensão fique garantida desde que, com as solicitações determinadas com  $\gamma_p = 1,1$  e  $\gamma_f = 1,0$ , fiquem satisfeitas as seguintes condições:

- a tensão máxima de compressão na seção de concreto simples, calculada em regime elástico linear, não ultrapassa 70% da resistência característica  $f_{ckj}$  prevista para a idade de aplicação da protensão;
- a tensão máxima de tração no concreto, nas seções transversais, não ultrapassa 1,2 vezes a resistência à tração correspondente ao valor  $f_{ckj}$  especificado;
- quando existem tensões de tração nas seções transversais, deve haver armadura de tração calculada com a hipótese de ser nula a resistência à tração do concreto. Permite-se admitir que a força nessa armadura, nessa fase da construção, seja igual à resultante das tensões de tração no concreto. Essa força não deve provocar acréscimos de tensões na armadura ativa superiores a 150 MPa no caso de fios e barras lisas e a 250 MPa em barras nervuradas com  $\eta_b \geq 1,5$ .

## 2.3 ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS DEVIDO A SOLICITAÇÕES TANGENCIAIS

### 2.3.1 Generalidades

O anexo da NBR 7197/86 altera disposições da NBR 6118/78 para a verificação à força cortante.

A protensão longitudinal em peças de concreto produz tensões normais de compressão que contribuem para redução das tensões principais de tração, fazendo com que estas fiquem mais inclinadas em relação ao eixo da peça. Como consequência, as fissuras de cisalhamento se formam com menor inclinação do que nas peças de concreto armado sem protensão.

Segundo Lenhardt, a inclinação das bielas comprimidas fica entre 25 e 35 graus, menos inclinadas que as de 45 graus da analogia clássica de treliça. Não obstante, nas regiões de cargas concentradas ou sobre apoios intermediários de vigas contínuas, por exemplo, surgem fissuras de cisalhamento em forma de leque e, nesses casos, acabam surgindo, inevitavelmente, fissuras a 45 graus.

Resultados experimentais demonstram que a protensão efetivamente reduz os esforços de tração na alma das vigas, na proporção inversa do grau de protensão. Ou seja, quanto maior o grau de protensão, menores são os esforços de tração na alma e, conseqüentemente, a armadura transversal necessária.

O efeito favorável da protensão sobre os esforços de tração é explicado com base nos seguintes fatores:

- a) na região de momentos fletores pequenos, as bielas comprimidas se desenvolvem com pouca inclinação;
- b) na região de grandes momentos fletores, como por exemplo nos apoios intermediários de vigas contínuas, uma parcela da força cortante é absorvida na zona comprimida, de tal modo que a força de tração na alma é menor do que na treliça clássica, apesar da inclinação da biela nesse ponto ser de 45 graus.

### 2.3.2 Forças cortantes (NBR 7197 - item 9.3.1)

Para a determinação da força cortante a ser considerada na verificação ao cisalhamento, aplicam-se as prescrições da NBR 6118, incluindo os efeitos das componentes tangencial e normal da força de protensão, respeitadas as exigências peculiares da NBR 7197. Para a alma de peças submetidas a cisalhamento, quando existem bainhas de diâmetro  $\phi_o$  maior que  $b_w/8$ , a largura resistente a considerar deve ser

$$b_w - \frac{1}{2} \sum \phi_o \quad (2-5)$$

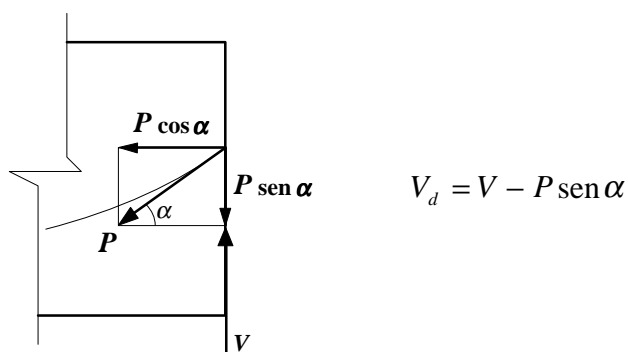
na posição em que essa diferença mais desfavorável. Permite-se desprezar os efeitos da protensão, quando favoráveis à segurança.

#### 2.3.2.1 Efeito da componente tangencial da força de protensão

De acordo com a NBR 7197, item 8, para o cálculo do valor de  $V_d$  deve ser considerada a projeção da força de protensão na sua direção, o que implicaria em subtrair



da força cortante atuante a componente da protensão na sua direção, como mostrado na figura a seguir.



Todavia, resultados experimentais elucidaram peculiaridades do comportamento da peça nessas condições que refutam essa hipótese.

Segundo Leonhardt, inicialmente acreditava-se que, no caso de vigas simples, a disposição de cabos parabólicos era a melhor solução, porque a componente vertical da força de protensão diminuía a força cortante que atuava no concreto.

Resultados obtidos em ensaios demonstraram que na passagem para o estado limite último esse efeito é diminuído, quando a relação entre as rigidezes dos banzos e das almas desempenha papel importante

Quando o tirante inferior é muito fraco, muito deformável, as bielas de compressão que se dirigem ao apoio não se apoiam nele, mas sim na região de ancoragem dos cabos, que é mais rígida e está situada mais acima.

Com isso, as bielas tornam-se menos inclinadas e a parcela da força cortante absorvida pela zona comprimida na flexão é menor. Por essa razão, os ensaios indicaram, para as vigas com cabos inclinados, forças nos estribos maiores do que em vigas com cabos retos dispostos no banzo tracionado.

Em virtude do acima exposto, recomenda-se que não se subtraia da força cortante a componente vertical da protensão no caso de cabos curvos. Assim, o valor de cálculo da força cortante atuante deve ser obtido a partir da expressão a seguir:

$$V_{d \max} = \gamma_g V_{g \max} + \gamma_q V_{q \max} \quad (2-6)$$

### 2.3.2.2 Efeito da componente normal da força de protensão

O efeito da componente normal da força de protensão é equiparado ao de uma força normal externa de compressão, com igual intensidade. A determinação da influência dessa força é dada pelo fator

$$\left( 1 + \frac{M_o}{M_{d, \max}} \right) < 2 \quad (2-7)$$

definido pela NBR 6118 para o cálculo da armadura transversal necessária à resistência dos esforços oriundos da força cortante, onde para o cálculo de  $M_o$  são considerados os efeitos de  $N_{pd}$  e  $M_{pd}$  acrescidos dos efeitos de  $N_{gd}$  e da parcela  $N_{qd}$  concomitante com  $V_d$ , calculando-se esses efeitos com  $\gamma_f = 0,9$ .

### 2.3.3 Tensão no concreto

O valor de cálculo da tensão convencional de cisalhamento no concreto, na alma das peças (tensão de referência), é determinado por:

$$\tau_{wd} = \frac{V_d}{b_w d} \quad (2-8)$$

Essa tensão de cálculo  $\tau_{wd}$  não pode ultrapassar o valor último fixado em 1.10.4 (tensões últimas resistentes). A largura  $b_w$  da seção transversal deve ser tomada de acordo com 1.10.2.

### 2.3.4 Tensões últimas resistentes

- para peças lineares com  $b_w < 5 h$ :

a) com armadura transversal a  $45^\circ$

$$\tau_{wu} \leq \begin{cases} 0,35 f_{cd} \\ 5,5 \text{ MPa} \end{cases} \quad (2-9a)$$

b) com armadura transversal a  $90^\circ$

$$\tau_{wu} \leq \begin{cases} 0,30 f_{cd} \\ 4,5 \text{ MPa} \end{cases} \quad (2-9b)$$

- para lajes e peças lineares com  $b_w > 5 h$  os coeficientes 0,35 e 0,30 devem ser multiplicados por um dos seguintes fatores, mantidos os limites absolutos ( $h$  em cm):

0,5	se	$h \leq 15 \text{ cm}$
$\frac{1}{3} + \frac{h}{90}$	se	$15 < h < 60$
1,0	se	$h \geq 60 \text{ cm}$

### 2.3.5 Cálculo da armadura transversal

A armadura transversal das peças lineares e das lajes, para resistir aos esforços oriundos da força cortante, deve ser calculada pela teoria clássica de Morsch, com base na seguinte tensão

$$\tau_d = 1,15\tau_{wd} - \tau_c > 0 \quad (\text{tensões em MPa}) \quad (2-10)$$

Na equação (2-10),  $\tau_c$  corresponde à parcela do cisalhamento resistida pelo concreto comprimido nas peças fletidas, calculado pela expressão

$$\tau_c = \psi_1 \sqrt{f_{ck}} \quad (f_{ck} \text{ e } \tau_c \text{ em MPa}) \quad (2-11)$$

Sendo:

$\psi_1 = 0,15$  na flexão simples e na flexo-tração com a linha neutra cortando a seção

$$\psi_1 = 0,15 \left( 1 + \frac{M_o}{M_{d \max}} \right) \quad \text{na flexo-compressão} \quad (2-12)$$

$\psi_1 = 0$  na flexo-tração com a linha neutra fora da seção

onde:

$M_o$  é o valor do momento fletor que anula a tensão normal na borda menos comprimida e

$M_{d \max}$  é o momento fletor de cálculo da seção transversal que está mais solicitada à flexão, no trecho considerado pelo cálculo.

A tensão na borda menos comprimida é calculada em função da eventual protensão ( $N_{pd}$  e  $M_{pd}$ ), acrescida dos efeitos de  $N_{gd}$  e da parcela de  $N_{qd}$  concomitante com  $V_d$ , ambos os efeitos calculados com  $\gamma_f = 0,9$ .

Por simplicidade e a favor da segurança,  $M_{d \max}$  pode ser tomado como o maior valor do semi-tramo considerado.

O coeficiente  $\psi_1$ , da equação (2-11), corresponde a valores que dependem do estado de solicitação longitudinal, ou seja, depende qualitativa e quantitativamente de como a peça é solicitada por flexão.

Quando a peça é solicitada por esforços elevados de tração (flexo-tração com linha neutra fora da seção), não há contribuição do concreto a ser considerada, daí tomar-se  $\psi_1 = 0$ .

Nos casos de flexão simples ou de flexo-tração com a linha neutra cortando a seção,  $\psi_1$  é tomado igual a 0,15.

No caso de flexo-compressão, e aí se inclui o caso da existência de protensão, o efeito favorável da força normal de compressão é levado em conta por meio de um fator de majoração

$$\beta_1 = \left( 1 + \frac{M_o}{M_{d, \max}} \right) \leq 2 \quad (2-13)$$

No cálculo de  $\beta_1$ ,  $M_o$  corresponde ao momento fletor que anula a tensão normal na borda menos comprimida, ou seja, corresponde ao momento de descompressão referente a uma situação inicial de solicitação em que atuam:

- a) a força normal e o momento fletor ( $N_{pd}$  e  $M_{pd}$ ) provocados pela protensão, ponderados com  $\gamma_f = 0,9$ ;

- b) as forças normais oriundas de carregamentos externos ( $N_{gd}$  e  $N_{qd}$ ), também afetados por  $\gamma_f = 0,9$ , desconsiderando-se a existência de momentos fletores concomitantes.

O momento  $M_o$  pode ser calculado pela expressão seguinte:

$$M_o = (\gamma_p \cdot P_\infty + \gamma_f \cdot N_{g+q}) \frac{W_1}{A_c} + \gamma_p \cdot P_\infty \cdot e_p \quad (2-14)$$

lembrando que  $W_1/A_c$  corresponde à distância da extremidade superior do núcleo central de inércia da seção ao centro de gravidade, ou seja, corresponde à excentricidade do centro de pressão com a qual a tensão na borda inferior se anula.

Para estribos verticais a  $90^\circ$ , a armadura transversal pode ser calculada conforme indicado na NBR 6118, ou seja:

$$\eta = \frac{\tau_d}{1,15\tau_{wd}} = \frac{1,15\tau_{wd} - \tau_c}{1,15\tau_{wd}}$$

$$\frac{A_{s90}}{S_{90}} = \frac{1,15 \eta V_d}{d \cdot f_{yd}}$$

$$A_{sw} = 100 \frac{A_{s90}}{S_{90}}$$

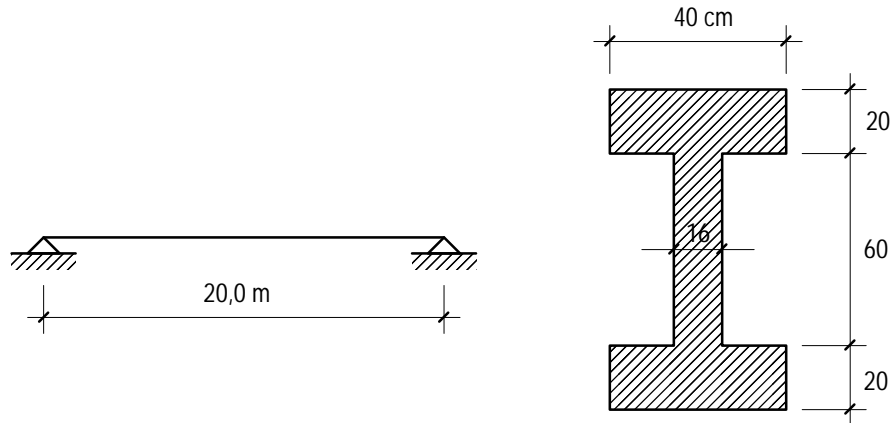
### 2.3.6 Armadura transversal mínima

- para estribos verticais a  $90^\circ$ :

$$A_{swmin} = \begin{cases} 0,25 b_w & \text{(para CA - 25 / CA - 32)} \\ 0,14 b_w & \text{(para CA - 40 / CA - 50 / CA - 60)} \end{cases}$$

### 2.3.7 Exemplo de aplicação

Verificar a viga abaixo quanto ao estado limite último devido a solicitações tangenciais. Dimensionar a armadura transversal.



#### a) Propriedades da seção

$$A_c = 20 \times 40 \times 2 + 16 \times 60 = 2.560 \text{ cm}^2$$

$$y = 50 \text{ cm}$$

$$J = \frac{40 \times 100^3}{12} - 2 \times \frac{12 \times 60^3}{12} = 2.901.333 \text{ cm}^4$$

$$W = \frac{J}{y} = \frac{2.901.333}{50} = 58.027 \text{ cm}^3$$

#### b) Materiais

Concreto:  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$

$$E_c = 0,9 \times 21.000 \sqrt{f_{ck} + 35} = 0,9 \times 21.000 \sqrt{300 + 35} = 345.927 \text{ kgf / cm}^2$$

Aço: CP 190 RB

$$E = 19.500 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{ptk} = 190 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{pyk} = 171 \text{ kN/cm}^2$$

#### c) Cargas

$$\text{Peso próprio: } g = A_c \times \gamma_c = \frac{2.560}{10.000} \times 2.500 = 640 \text{ kgf/m} = 6,4 \text{ kN/m}$$

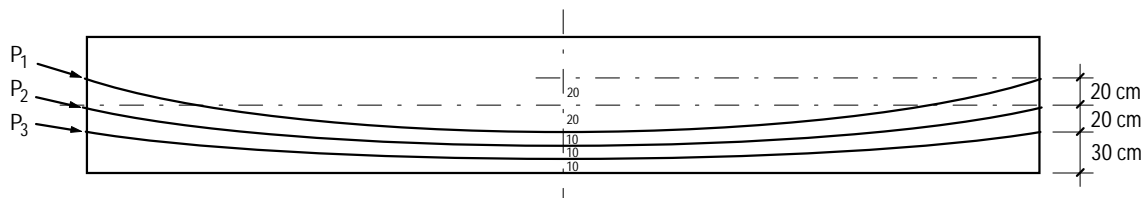
$$\text{Sobrecarga: } q = 16,0 \text{ kN/m}$$

$$\text{Força de protensão - valor médio após as perdas: } P_\infty = 405 \text{ kN}$$

**d) Tipo de protensão**

Protensão limitada - pós-tensão com bainha metálica

**e) Traçado dos cabos**



**f) Esforços**

$$M_g = 32.000 \text{ kN.cm}$$

$$M_q = 80.000 \text{ kN.cm}$$

$$M_p = 3 \times 405 \times (-30) = -36.450 \text{ kN.cm}$$

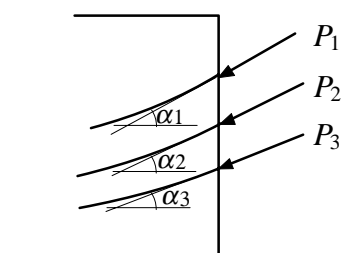
$$V_g = 6,4 \text{ kN/m} \times 20 \text{ m} / 2 = 64 \text{ kN}$$

$$V_q = 16 \times 20 / 2 = 160 \text{ kN}$$

**g) Esforços de cálculo**

$$M_d = 1,4 M_g + 1,0 M_p + 1,5 M_q =$$

$$= 1,4 (32.000) + 1,0 (-36.450) + 1,5 (80.000) = 128.350 \text{ kN.cm}$$



$$P_{\text{médio}} = P_{\infty} = 405 \text{ kN}$$

$$\alpha_{\text{médio}} = 3,44^\circ$$

$$P \text{ sen } \alpha = 24,30 \text{ kN}$$

Como são 3 cabos:

$$V_d = 1,4 V_g + 1,5 V_q + 3P \text{ sen } \alpha =$$

$$= 1,4 (64) + 1,5 (160) - 3 \times 24,30 = 256,70 \text{ kN}$$

**h) Tensão no concreto**

$$\tau_{wd} = \frac{V_d}{b_w d} = \frac{256,70}{16 \times 95} = 0,169 \text{ kN/cm}^2 = 1,69 \text{ MPa}$$

**i) Tensão última**

$$\tau_{wu} \leq \begin{cases} 0,30 f_{cd} = 6,43 \text{ MPa} \\ 4,50 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\tau_{wu} = 4,50 \text{ MPa} = 0,450 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{wd} < \tau_{wu} \Rightarrow \text{Ok!}$$

**j) Cálculo da armadura transversal**

$$M_o = (\gamma_p \cdot P_\infty + \gamma_f \cdot N_{g+q}) \frac{W_1}{A_c} + \gamma_p \cdot P_\infty \cdot e_p$$

$$M_o = (0,9 \times 3 \times 405 + 0) \frac{58.027}{2560} + 0,9 \times 3 \times 405 \times 30 = 57.591 \text{ kN.cm}$$

$$\psi_1 = 0,15 \left( 1 + \frac{M_o}{M_{d \max}} \right) = 0,15 \left( 1 + \frac{57.591}{128.350} \right) = 0,217 \leq 0,30 \Rightarrow \text{Ok!}$$

$$\tau_c = \psi_1 \sqrt{f_{ck}} = 0,217 \sqrt{30} = 1,19 \text{ MPa}$$

$$\tau_d = 1,15 \tau_{wd} - \tau_c = 1,15 \times 1,69 - 1,19 = 0,75 \text{ MPa}$$

$$\eta = \frac{\tau_d}{1,15 \tau_{wd}} = \frac{0,75}{1,15 \times 1,69} = 0,39$$

$$\frac{A_{s90}}{S_{90}} = \frac{1,15 \eta V_d}{d f_{yd}} = \frac{1,15 \times 0,39 \times 256,70}{95 \times 43,48} = 0,0277$$

$$A_{sw} = 100 \frac{A_{s90}}{S_{90}} = 2,77 \text{ cm}^2/\text{m}$$

\* armadura transversal mínima:

$$A_{sw \min} = 0,14 b_w = 2,24 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{sw} > A_{sw \min} \Rightarrow A_{sw} = 2,77 \text{ cm}^2$$

$\phi$	área	n	$n \times \text{área}$	folga (%)	
4,0	0,126	22	2,77	0%	$\phi 4,0$ c. 9,0 cm
5,0	0,196	16	3,14	13,18%	$\phi 5,0$ c. 12,5 cm
6,3	0,312	10	3,12	12,60%	$\phi 6,3$ c. 20,0 cm
8,0	0,503	6	3,02	8,92%	$\phi 8,0$ c. 30,0 cm
10,0	0,785	4	3,14	13,32%	$\phi 10,0$ c. 50,0 cm

Adotar  $\phi 8,0$  c. 30,0 cm.

## Bibliografia

---

1. **ABNT** (1978) Associação Brasileira de Normas Técnicas, "Projeto e Execução de Obras em Concreto Armado", *NBR 6118/78*, Rio de Janeiro.
2. **ABNT** (1989) Associação Brasileira de Normas Técnicas, "Projeto de Estruturas de Concreto Protendido", *NBR 7197/89*, Rio de Janeiro.
3. **ABNT** (1985) Associação Brasileira de Normas Técnicas, "Projeto e Execução de Estruturas de Concreto Pré-moldado", *NBR 9062/85*, Rio de Janeiro.
4. **ABNT** (1990) Associação Brasileira de Normas Técnicas, "Fios de aço para Concreto Protendido", *NBR 7482/90*, Rio de Janeiro.
5. **ABNT** (1990) Associação Brasileira de Normas Técnicas, "Cordoalha de Aço para Concreto Protendido", *NBR 7483/90*, Rio de Janeiro.
6. **ABNT** (1984) Associação Brasileira de Normas Técnicas, "Ações e Segurança nas Estruturas", *NBR 8681/84*, Rio de Janeiro.
7. **Bruggeling**, A. S. G. (1991); "Encarte Técnico IBRACON/PINI - CONCRETO", da revista CONSTRUÇÃO, nos. 2223 a 2271. de set/1990 a ago/1991.
8. **C.E.B.** (1990); Código Modelo do CEB/FIP
9. **Giongo**, José Samuel (1994); "Concreto Armado: Projeto Estrutural de Edifícios", EESC/USP, São Carlos.
10. **Hanai**, João Bento de (1988); "Fundamentos do Concreto Protendido", Notas de aula, EESC-USP, São Carlos.
11. **Holck**, Carlos H. (1991); "O Estado Limite de Fissuração do Concreto na nova versão do Código Modelo do CEB-FIP", *Revista IBRACON no. 2*: 32-35.
12. **Leonhardt**, Fritz (1979); "Construções de Concreto", Editora Interciência, Vol. 5, Rio de Janeiro.
13. **Mason**, Jayme (1976); "Concreto Armado e Protendido: Princípios e Aplicações", Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, Rio de Janeiro.
14. **Pfeil**, Walter (1984); "Concreto Protendido Vol. 1 - Introdução", LTC Editora, Rio de Janeiro.
15. **Pfeil**, Walter (1983a); "Concreto Protendido Vol. 2 - Processos Construtivos/Perdas de Protensão", 2a. ed., Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, Rio de Janeiro.
16. **Pfeil**, Walter (1983b); "Concreto Protendido Vol. 3 - Dimensionamento à Flexão", Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, Rio de Janeiro.
17. **Rüsch**, Hubert (1980); "Concreto Armado e Protendido: Propriedades dos Materiais e dimensionamento", Editora Campus, Rio de Janeiro.
18. **Süssekind**, José Carlos (1985); "Curso de Concreto", Vol. 01, 4a. edição. Editora Globo, Rio de Janeiro.
19. **Silva**, Reginaldo Carneiro da (1992); "Concreto Armado: Estados Limites de Utilização", Apostila, UFV, Viçosa.
20. **Tepedino**, José de Miranda (1992); "Concreto Protendido. Verificação em Estado Limite último - Ruptura por solicitações axiais e transversais", Notas de aula, Belo Horizonte.